**Лек 15.Метод Попова**

Решение задачи об абсолютной устойчивости системы с одной однозначной нелинейностью (т. е. устойчивости при любой форме этой нелинейности со слабым ограничением типа (17.54) или типа рис. 17.14) с помощью теорем прямого [метода Ляпунова](http://scask.ru/f_book_kiber1.php?id=747) было проиллюстрировано на двух примерах в § 17.2.

Изложим теперь частотный метод, предложенный румынским ученым В. М. Поповым [97], при использовании которого та же задача решается более просто приемами, аналогичными частотным способам исследования [устойчивости линейных систем](http://scask.ru/c_book_r_cos.php?id=9).

Если в системе автоматического регулирования имеется лишь одна однозначная нелинейность



то, объединив вместе все остальные (линейные) уравнения системы, можно всегда получить общее уравнение линейной части системы (рис. 17.17, а) в виде



где



причем будем считать 



Рис. 17.17.

Пусть нелинейность  имеет любое очертание, не выходящее за пределы заданного угла  к (рис. 17.17, б), т. е. при любом х



Пусть [многочлен](http://scask.ru/f_book_m_cat.php?id=22)  или, что то же, [характеристическое уравнение](http://scask.ru/q_book_algebra.php?id=186) линейной части  имеет все корни с отрицательными вещественными частями или же кроме них имеется еще не более двух нулевых корней.

Другими словами, допускается, чтобы  или  в выражении , т. е. не более двух нулевых полюсов в передаточной функции линейной части системы



Приведем без доказательства формулировку теоремы В. М. Попова: для установления устойчивости [нелинейной системы](http://scask.ru/g_book_prs.php?id=78) достаточно подобрать такое конечное [действительное число](http://scask.ru/f_book_m_cat.php?id=18)  при котором при всех



где  — амплитудно-фазовая [частотная характеристика](http://scask.ru/a_d_23.php) линейной части системы. При наличии одного нулевого полюса требуется еще, чтобы



а при двух нулевых полюсах



Теорема справедлива также и при наличии в знаменателе  передаточной функции линейной части не более двух чисто мнимых корней, но при этом требуются некоторые другие простые добавочные условия [2], называемые условиями предельной устойчивости.

Другая формулировка той же теоремы, дающая удобную графическую интерпретацию, связана с введением видоизмененной [частотной характеристики](http://scask.ru/a_d_23.php)  которая определяется следующим образом:



где  — нормирующий множитель.

График  имеет вид (рис. 17.18, а), аналогичный  когда в выражениях  разность степеней 



Рис. 17.18.

Если же разность степеней  то конец графика  будет на мнимой оси ниже начала координат (рис. 17.18, б).

Преобразуем левую часть [неравенства](http://scask.ru/a_book_e_math.php?id=87) (17.116):



Тогда, положив



и использовав соотношения (17.117), получим вместо (17.116) для теоремы В. М. Попова условие



при всех 

Очевидно, что равенство



представляет [уравнение прямой](http://scask.ru/q_book_msh.php?id=29) на плоскости 

Отсюда вытекает следующая графическая интерпретация теоремы В. М. Попова: для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такую прямую на плоскости  проходящую через точку  чтобы вся кривая  лежала справа от этой прямой.

На рис. 17.19 показаны случаи выполнения теоремы. В этих случаях [нелинейная система](http://scask.ru/g_book_prs.php?id=78) устойчива при любой форме однозначной нелинейности, ограниченной лишь условием (17.115). На рис. 17.20 показаны случаи, когда

теорема не выполняется, т. е. [нелинейная система](http://scask.ru/g_book_prs.php?id=78) не имеет абсолютной устойчивости.

Заметим, что, например, в задаче о самолете с автопилотом (§ 17.2) условие (17.54) означает любое расположение нелинейной характеристики во всем первом (и третьем) квадранте. Во всех подобных случаях согласно рис. 17.17 имеем .



Рис. 17.19.



Рис. 17.20.

В теореме В. М. Попова при этом вместо (17.116) получаем условие



а вместо (17.118)



при всех  Поэтому в графической интерпретации прямая должна проходить не так, как показано было на рис. 17.19, а через начало координат.

В частности, для указанного примера (§ 17.2) уравнения (17.63) можно» преобразовать к виду



где обозначено  причем  — [производная](http://scask.ru/q_book_msh.php?id=117) по .

Передаточная функция линейной части системы будет



Отсюда



Умножив числитель и знаменатель на  получим



а согласно (17.117)



[Неравенство](http://scask.ru/a_book_e_math.php?id=87) (17.121) принимает вид



Очевидно, что это неравенство может быть выполнено при любом  если



и если h берется сколь угодно большим, чтобы обеспечить неравенство (17.123) при сколь угодно малых со.

Полученное условие (17.124) выполняется при



что точно совпадает с найденными ранее условиями абсолютной устойчивости данной системы (17.69) и (17.70). Смысл практической реализации этих условий был разъяснен в § 17.2.

Графически критерий устойчивости выражается в том, что вся кривая , построенная согласно (17.122), расположена (рис. 17.21, а) справа от прямой  обозначенной штрих-пунктиром, со сколь угодно малым наклоном, если 



Рис. 17.21.

Если же  (рис. 17.21, б), то такую прямую провести невозможно и, следовательно, [нелинейная система](http://scask.ru/g_book_prs.php?id=78) не будет абсолютно устойчивой.

Здесь был приведен простой пример, в котором условия устойчивости по методу В. М. Попова выражаются в общем буквенном виде. В большинстве технических задач этого не получится. Однако видно, что описанный частотный критерий устойчивости В. М. Попова для систем с одной однозначной нелинейностью в его графической форме может быть применен при любой сложности линейной части системы и численно заданных коэффициентах уравнений. Более того, он может быть применен в случае, когда не заданы уравнения, но известна экспериментально снятая амплитудно-фазовая [частотная характеристика](http://scask.ru/a_d_23.php) линейной части  Чтобы установить устойчивость системы согласно рис. 17.19,  надо перестроить в характеристику  пользуясь формулами (17.117).